Imagine que hay una cantidad a la que por ahora llamaremos COSA, que vale

$$\text{COSA} = -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\phi_2\phi 3$$

a) Obtenga la matriz **A** que cumpla

$$\text{COSA} = \begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3\end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$

b) Diagonalice **A**. Es decir, encuentre una matriz **M** de vectores propios y sus valores propios correspondientes de manera que

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

c) Muestre que

$$\text{COSA} = -5\psi_1^2 - 6\psi_2^2 - 7\psi_3^2$$

a) **A** debe ser una matriz 3×3. Operando

$$\begin{aligned}
\text{COSA} &= \begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}A_{11}\phi_1 + A_{12}\phi_2 + A_{13}\phi_3\\ A_{21}\phi_1 + A_{22}\phi_2 + A_{23}\phi_3\\ A_{31}\phi_1 + A_{32}\phi_2 + A_{33}\phi_3\end{pmatrix}\\
&= A_{11}\phi_1^2 + A_{12}\phi_1\phi_2 + A_{13}\phi_1\phi_3 + A_{21}\phi_1^2 + A_{22}\phi_1\phi_2 + A_{23}\phi_1\phi_3 + A_{31}\phi_1^2 + A_{32}\phi_1\phi_2 + A_{33}\phi_1\phi_3\\
&= A_{11}\phi_1^2 + A_{22}\phi_2^2 + A_{33}\phi_3^2 + (A_{12} + A_{21})\phi_1\phi_2 + (A_{13} + A_{31})\phi_1\phi_3 + (A_{23} + A_{32})\phi_2\phi_3\\
&= -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\,\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\,\phi_2\phi_3
\end{aligned}$$

Igualando término a término encontramos

$$\begin{aligned}
A_{11} &= A_{22} = A_{33} = -6\\
A_{12} + A_{21} &= A_{23} + A_{32} = -\sqrt{2}\\
A_{13} + A_{31} &= 0
\end{aligned}$$

Suponemos que la matriz es simétrica, con lo que nos aseguramos de que es diagonalizable, por lo que $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$ y $A_{23} = A_{32}$. De manera que obtenemos

$$\begin{aligned}
A_{11} &= A_{22} = A_{33} = -6\\
A_{12} &= A_{21} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\\
A_{13} &= A_{31} = 0\\
A_{23} &= A_{32} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Nuestra matriz **A** queda:

$$\boxed{,, A = \begin{pmatrix} -6 & -1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & -6 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & -6\end{pmatrix}}$$

b) Se pide diagonalizar la matriz $\mathbf{A}$
Esta matriz es simétrica, por lo que debe tener una serie de vectores propios, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ y valores propios correspondientes, λ_1, λ_2 y λ_3

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\,\mathbf{v}_1\\ \mathbf{A}\,\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\,\mathbf{v}_2\\ \mathbf{A}\,\mathbf{v}_3 &= \lambda_3\,\mathbf{v}_3\end{aligned}$$

Para encontrarlos, supongamos que las $\mathbf{v}_i$ son de la forma

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Entonces, se debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} -6 & -1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & -6 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x - 6y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y - 6z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,x\\ \lambda\,y\\ \lambda\,z\end{pmatrix}$$

Pasando al primer miembro y operando

$$\begin{pmatrix} -(6+\lambda)\,x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x - (6+\lambda)\,y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y - (6+\lambda)\,z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -(6+\lambda)\,x & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y & & = & 0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x & -(6+\lambda)\,y & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z & = & 0\\ & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y & -(6+\lambda)\,z & = & 0\end{array}\right.$$

Este es un sistema compatible indeterminado. El determinante de la matriz de los coeficientes debe valer cero

$$\begin{vmatrix} 6+\lambda & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 6+\lambda & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 6+\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante llegamos finalmente a la ecuación

$$(6+\lambda)\,(\lambda^2 + 12\,\lambda + 35) = 0$$

Que nos da las soluciones (valores propios)

$$\boxed{\lambda_1 = -5;\ \lambda_2 = -6 \text{ y } \lambda_3 = -7}$$

Ahora hallamos los vectores propios correspondientes

Para $\lambda_1 = -5$:

Sustituyendo λ por $\lambda_1 = -5$ y multiplicando las ecuaciones por -1, el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x + y + \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y + z = 0 \end{cases}$$

Que nos da, dejando indeterminado a y, pero eligiendo el valor $y = 1$:

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} y; y = 1; z = \frac{-1}{\sqrt{2}} y$$

El vector propio tendría la forma, donde N es la constante de normalización, para hacer su módulo igual a la unidad

$$\mathbf{v}_1 = N \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para hallar el valor de la constante de normalización, hallamos el módulo del vector sin la constante

$$|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Dividiendo $\mathbf{v}_1$ entre su módulo obtenemos el vector unidad correspondiente

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$

Para $\lambda_2 = -6$:

Sustituyendo λ por $\lambda_1 = -6$ y multiplicando las ecuaciones por -1, el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$$

Que nos da, dejando indeterminado a x, pero eligiendo el valor $x = 1$:

$$x = 1; y = 0; z = -x$$

El vector propio tendría la forma, donde N es la constante de normalización, para hacer su módulo igual a la unidad

$$\mathbf{v}_2 = N \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el valor de la constante de normalización, hallamos el módulo del vector sin la constante

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Dividiendo $\mathbf{v}_2$ entre su módulo obtenemos el vector unidad correspondiente

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

Para $\lambda_3 = -7$:

Sustituyendo λ por $\lambda_3 = -7$, el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + y - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y + z = 0 \end{cases}$$

Que nos da, dejando indeterminado a y, pero eligiendo el valor $y = 1$:

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}}y;\ y = 1;\ z = \frac{-1}{\sqrt{2}}y$$

El vector propio tendría la forma, donde N es la constante de normalización, para hacer su módulo igual a la unidad

$$\mathbf{v}_3 = N\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Para hallar el valor de la constante de normalización, hallamos el módulo del vector sin la constante

$$|\mathbf{v}_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Dividiendo $\mathbf{v}_3$ entre su módulo obtenemos el vector unidad correspondiente

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}}$$

COMPROBACIÓN - Los vectores propios deben ser ortogonales:

Comprobamos que la base formada por los vectores propios es ortogonal:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-1+2-1}{4} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1+0+1}{2\sqrt{2}} = 0$$

La matriz formada por los vectores propios es

$$\boxed{\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}}$$

c) Se puede utilizar la matriz $\mathbf{M}$ hallada anteriormente para obtener un vector $\boldsymbol{\psi}$ a partir de $\boldsymbol{\phi}$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\psi}$$

La ecuación anterior nos permite expresar $\boldsymbol{\phi}$ en la función de $\boldsymbol{\psi}$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_3 \\ -\frac{1}{2}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3 \end{pmatrix}$$

Los vectores en la base formada por los vectores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2}\,\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3 \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_3 \\ \phi_3 &= -\frac{1}{2}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3 \end{aligned}$$

Para calcular COSA en la nueva base, desarrollamos los cinco términos por separado

$$\begin{aligned}
-6\,\phi_1^2 &= -6\left(-\frac{1}{2}\,\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3\right)^2 = -\frac{3}{2}\,\psi_1^2 - 3\,\psi_2^2 - \frac{3}{2}\,\psi_3^2 - \frac{6}{\sqrt{2}}\,\psi_1\,\psi_2 + 3\,\psi_1\,\psi_3 + \frac{6}{\sqrt{2}}\,\psi_2\,\psi_3 \\
-6\,\phi_2^2 &= -6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_3\right)^2 = -3\,\psi_1^2 - 3\,\psi_3^2 - 6\,\psi_1\,\psi_3 \\
-6\,\phi_3^2 &= -6\left(-\frac{1}{2}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3\right)^2 = -\frac{3}{2}\,\psi_1^2 - 3\,\psi_2^2 - \frac{3}{2}\,\psi_3^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}\,\psi_1\,\psi_2 + 3\,\psi_1\,\psi_3 - \frac{3}{\sqrt{2}}\,\psi_2\,\psi_3 \\
-\sqrt{2}\,\phi_1\,\phi_2 &= -\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\,\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_3\right) = \frac{1}{2}\,\psi_1^2 - \frac{1}{2}\,\psi_3^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1\,\psi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2\,\psi_3 \\
-\sqrt{2}\,\phi_2\,\phi_3 &= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_3\right)\left(-\frac{1}{2}\,\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2 + \frac{1}{2}\,\psi_3\right) = \frac{1}{2}\,\psi_1^2 - \frac{1}{2}\,\psi_3^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_1\,\psi_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2\,\psi_3
\end{aligned}$$

Agrupamos términos por separado.
Empezamos por los que contienen ψ_1^2, ψ_2^2 y ψ_3^2

$$\left(-\frac{3}{2} - 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\,\psi_1^2 + (-3-3)\,\psi_2^2 + \left(-\frac{3}{2} - 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\,\psi_3^2 = -5\,\psi_1^2 - 6\,\psi_2^2 - 7\,\psi_3^2$$

Comprobamos que se anulan los términos cruzados

$$\left(-\frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\psi_1\,\psi_2 + (3-6+3)\,\psi_1\,\psi_3 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\psi_2\,\psi_3 = 0$$

Por tanto

$$\text{COSA} = \boxed{-5\,\psi_1^2 - 6\,\psi_2^2 - 7\,\psi_3^2}$$